**13. Relation de conjugaison de Descartes**

**Introduction**

 La relation de Descartes met en lien trois éléments du dispositif optique : le distances de la lentille avec l’objet et l’image.

Problématique : Qu’est-ce que la relation de conjugaison de Descartes et quelles autres relations y sont liées ?

1. Définition
2. Schéma optique
* (Explication du schéma optique avec objet AB et image A’B’).
* Une lentille convergente dévie les rayons arrivant parallèlement en les faisant passer par un même point appelé foyer.
* La distance entre la lentille et le foyer est appelée distance focale, notée f’.
* Il faut considérer des conditions de stigmatisme et d’aplanétisme, c’est-à-dire que l’image d’un point est un point et l’image d’un plan est un plan.
1. Relation de conjugaison de Descartes
* Elle établit que :

$$\frac{1}{\overbar{OA^{'}}}=\frac{1}{\overbar{OA}}+\frac{1}{\overbar{OF^{'}}}$$

Et donc qu’une image A’B’ d’un objet AB est l’homothétique de cet objet. On peut en effet retrouver la relation de Descartes par la relation de Newton $\overbar{FA}⋅\overbar{F^{'}A^{'}}=f⋅f^{'}$ en exprimant $\overbar{FA}$ et $\overbar{F^{'}A^{'}}$ en fonction de $\overbar{OA}$ et $\overbar{OA'}$.

* Elle permet d’exprimer la distance focale en fonction de $\overbar{OA} $et $\overbar{OA'}$.

$$\overbar{OF^{'}}=\frac{\overbar{OA}⋅\overbar{OA^{'}}}{\overbar{OA}-\overbar{OA^{'}}}$$

1. La construction de Bouasse
* Dans un repère orthonormé, on crée des droites (PP’) avec P de coordonnées ($\overbar{OA}$,0) et P’ de coordonnées (0,$\overbar{OA'}$) pour plusieurs couples ($\overbar{OA}$ ,$ \overbar{OA'}$).
* On remarque que toutes les droites se croisent en un point commun Ω dont les coordonnées permettent d’approximer la distance focale. En effet Ω a pour coordonnées ($f$,$ f'$).
* L’équation d’une droite quelconque est $y=-\overbar{\frac{OA^{'}}{\overbar{OA}}}x+\overbar{OA^{'}}$.

Au point Ω : $f^{'}=-\overbar{\frac{OA^{'}}{\overbar{OA}}}⋅f+\overbar{OA^{'}}$. Or $f=-f^{'}$

Donc $\overbar{OA}⋅f^{'}=\overbar{OA^{'}}⋅f+\overbar{OA^{'}}⋅\overbar{OA}$

$$⇔\frac{1}{\overbar{OA^{'}}}=\frac{1}{\overbar{OA}}+\frac{1}{f^{'}}$$

On retrouve donc la relation de Descartes.

1. La méthode de Bessel
* On note D la distance entre l’objet et l’écran. Donc $D=OA+OA^{'}$ .
* À partir de la relation de Descartes, on montre que si $D\geq 4f^{'}$, il y a deux positions de la lentille pour lesquelles on obtient une image nette à l’écran.

En effet, d’après la relation de Descartes :

$$\frac{1}{\overbar{OA^{'}}}=\frac{1}{\overbar{OA}}+\frac{1}{f^{'}}$$

Donc : $f^{'}=\frac{\overbar{OA}⋅\overbar{OA^{'}}}{\overbar{OA}-\overbar{OA^{'}}}$

$$⇔f^{'}=\frac{\overbar{OA}\left(D-\overbar{OA}\right)}{D}$$

$$⇔-\overbar{OA}^{2}+D⋅\overbar{OA}-f^{'}⋅D=0$$

$$Δ=D^{2}-4f^{'}D=D(D-4f^{'})$$

Donc quand $D>4f'$, on a 2 positions de lentille.

* On nomme $d$ la distance les séparant. Donc $d=\overbar{OA}\_{1}-\overbar{OA}\_{2}$.

$$d=\frac{D+\sqrt{D\left(D-4f^{'}\right)}}{2}-\frac{D-\sqrt{D\left(D-4f^{'}\right)}}{2}$$

$$⇔d=\sqrt{D\left(D-4f^{'}\right)}$$

$$⇔d^{2}=D(D-4f^{'})$$

$$⇔4f^{'}=D^{2}-d^{2}$$

$$⇔f^{'}=\frac{D^{2}-d^{2}}{4}$$

Ce qui est la formule de Bessel. Si $D=4f'$ on a qu’une position de lentille.

**Conclusion**

 Ainsi la relation de conjugaison de Descartes met en relation les distances entre l’objet et la lentille, entre l’image et la lentille et la distance focale. Elle peut être mise en lien avec une construction mathématique (Bouasse) et une formule (Bessel) permettant d’approximer la distance focale expérimentalement.